Πρόταση 1.4.5: $U\subset\mathbb{R}^n$, $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$, τότε $\underbrace{\bar{x}\in U'}_{=\text{παράγωγο σύνολο του } U} \iff \exists(\bar{x}_\nu)\subset U\setminus\{\bar{x}\}$ $\quad \bar{x}_\nu\to\bar{x}$

$\iff \bar{x}$ σημείο συσσ. του $U$

Πρόταση 1.4.6: $U\subset\mathbb{R}^n$, $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$. Τότε: $\underbrace{\bar{x}\in\bar{U}}_{\text{κλειστή θήκη του } U} \iff \exists(\bar{x}_\nu)\subset U \quad \bar{x}_\nu\to\bar{x}$

SOS Πρόταση 1.4.7: $U\subset\mathbb{R}^n$ κλειστό

$\iff \forall(\bar{x}_\nu)\subset U$ με $\bar{x}_\nu\to\bar{x}\in\mathbb{R}^n : \bar{x}\in U$

Πρόταση 1.4.8: $U\subset\mathbb{R}^n$ συμπαγές

= κλειστό ∧ φραγμένο

$\iff \forall(\bar{x}_\nu)\subset U \ \exists(\bar{x}_{k_\nu})\subset(\bar{x}_\nu)$ και $\bar{x}\in U$: $\bar{x}_{k_\nu}\to\bar{x}$

Απόδειξη Πρότασης 1.4.6: $\Rightarrow$ Γνωρίζαμε (παλαιότερη πρόταση)
$\bar{U}=U\cup U'$. Αν $\bar{x}\in U$, τότε η σταθερή ακολουθία $\bar{x}_\nu=\bar{x}$, $\forall\nu\in\mathbb{N}$. Έχει τις ζητούμενες ιδιότητες ($(\bar{x}_\nu)\subset U$ και $\bar{x}_\nu\to\bar{x}$)

Αν $\bar{x}\in U'$, τότε (Πρότ. 1.4.5) έχουμε $\exists(\bar{x}_\nu)\subset\underbrace{U\setminus\{\bar{x}\}}_{\subset U}$ : $\bar{x}_\nu\to\bar{x}$ και $\bar{x}_\nu\to\bar{x}$

($\Leftarrow$) Έστω $(\bar{x}_\nu)\subset U$ με $\bar{x}_\nu\to\bar{x}$

Αν $\exists\nu$ με $\bar{x}_\nu=\bar{x}$, τότε $\bar{x}\in U$

Ενώ, αν $\forall\nu$ $\bar{x}_\nu\neq\bar{x}$, τότε (αφού $(\bar{x}_\nu)\subset U$) θα έχουμε $(\bar{x}_\nu)\subset U\setminus\{\bar{x}\}$.

Επίσης, $\bar{x}_\nu\to\bar{x}$ (από υπόθεση) $\xRightarrow{\text{Πρόταση 1.4.5}}$ $\bar{x}\in U'\subset U'\cup U=\bar{U}$.

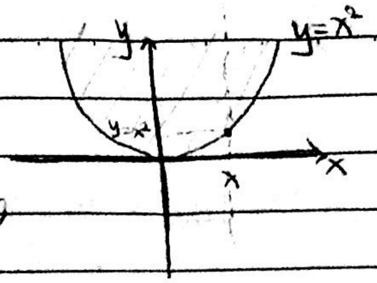
Απόδειξη - Πρόταση 1.4.7:

($\Rightarrow$): Έστω $(\bar{x}_\nu)\subset U$ με $\bar{x}_\nu\to\bar{x}\in\mathbb{R}^n$. Δ.ν.δ.ο. $\bar{x}\in U$. Από την πρόταση 1.4.6 έχουμε $\bar{x}\in\bar{U}$ και από προηγ. πρόταση έχουμε ότι $U$ κλειστό $\iff U=\bar{U}$.
Άρα, εδώ αφού έχουμε ότι $U$ κλειστό, ισχύει $U=\bar{U}$ και άρα $\bar{x}\in U$.

($\Leftarrow$): Έστω $\bar{x}\in\bar{U}$. Τότε, από την Πρότ. 1.4.6 $\exists(\bar{x}_\nu)\subset U$ με $\bar{x}_\nu\to\bar{x}$, και από την υπόθεση (δηλ. η δεξιά πλευρά της ισοδυναμίας) γνωρίζαμε ότι για κάθε τέτοια ακολουθία ισχύει $\boxed{\bar{x}\in U}$

Άσκηση: (κλασική - σε θέματα)

$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$




Είναι ανοικτό / κλειστό / τίποτα από τα δύο;

Και πως το δείχνουμε;

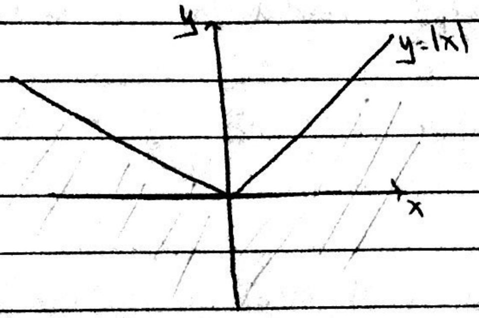
Το σύνολο είναι κλειστό. Πράγματι, έστω ότι $\underbrace{(x_\nu, y_\nu) \in U}_{\Leftrightarrow\, y_\nu \geq x_\nu^2}$ με

$(x_\nu, y_\nu) \to (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow x_\nu \to x_0 \wedge y_\nu \to y_0 \Rightarrow x_\nu^2 \to x_0^2$

$y_\nu \geq x_\nu^2 \Rightarrow y_0 \geq x_0^2$

Θ.ν.δ.ο. $\underbrace{(x_0, y_0) \in U}_{\Leftrightarrow\, y_0 \geq x_0^2}$

Άσκηση: Εξετάστε αν το σύνολο $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < |x|\}$ είναι ανοικτό / κλειστό / τίποτα από τα δύο;




Το $U$ είναι ανοικτό επειδή το $U^c = \mathbb{R}^n \setminus U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x|\}$ είναι κλειστό.

Έστω $(x_\nu, y_\nu) \in U^c$ με $\underbrace{x_\nu \to x_0}_{} \wedge y_\nu \to y_0$

$\Rightarrow \underbrace{|x_\nu|}_{\leq y_\nu} \to |x_0|$ $[\,||x_\nu| - |x_0|| \leq |x_\nu - x_0| \to 0\,]$

$\to y_0 \Leftrightarrow (x_0, y_0) \in U^c$

Άσκηση: Δείξτε ότι η κλειστή μπάλα και η σφαίρα είναι συμπαγή σύνολα

Λύση: Έστω $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ και $r > 0$. Θ.ν.δ.ο.: $\bar{B}(\bar{x}_0, r) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq r\}$ και $\partial B(\bar{x}_0, r) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{x}_0\| = r\}$ είναι κλειστά και φραγμένα

Φραγμένα: Θ.ν.δ.ο. $\underset{\exists R > 0}{\forall \bar{x} \in \bar{B}(\bar{x}_0, r)}\ \|\bar{x}\| < R$

$\Rightarrow \|\bar{x}\| - \|\bar{x}_0\| \leq \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \Rightarrow \|\bar{x}\| \leq \|\bar{x}_0\| + \|\bar{x} - \bar{x}_0\|$ (*)

(*) $\to \forall \bar{x} \in \bar{B}(\bar{x}_0, r)\ \|\bar{x}\| \leq \|\bar{x}_0\| + r = R$

$\Rightarrow \partial B(\bar{x}_0, r) \subset \bar{B}(\bar{x}_0, r) \subset B(\bar{0}, \underbrace{R + \varepsilon}_{= \tilde{R}}) \ (\forall \varepsilon > 0)$

$[\,|\|\bar{x}\| - \|\bar{x}_0\|| \leq \|\bar{x} - \bar{x}_0\|$

$\|\bar{x}_0\| = \|\bar{x}_0 - (\bar{x} - \bar{x}_0)\| \leq \|\bar{x}_0\| + \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \Leftrightarrow \|\bar{x}\| - \|\bar{x}_0\| \leq \|\bar{x} - \bar{x}_0\|$ και

$\|\bar{x}_0\| - \|\bar{x}\| \leq \|\bar{x}_0 - \bar{x}\|$

No. 3 Date

Κλειστός: Ν.δ.ο. $\bar{B}(\bar{x}_0, r)$ κλειστό (γνωστό μεν από προηγούμενη πρόταση, αλλά ας δούμε αν αποδεικνύεται και με ακολουθίες)

Έστω $\underbrace{(\bar{x}_\nu) \subset \bar{B}(\bar{x}_0, r)}_{\Leftrightarrow\ \forall \nu:\ \|\underbrace{\bar{x}_\nu - \bar{x}_0}_{=\bar{y}_0}\| \le r}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Ν.δ.ο. $\underbrace{\bar{x} \in \bar{B}(\bar{x}_0, r)}_{\Leftrightarrow\ \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \le r}$

$$\bar{x}_\nu \to \bar{x} \Leftrightarrow \underbrace{\|\bar{x}_\nu - \bar{x}\|}_{=\|(\bar{x}_\nu - \bar{x}_0) + (\bar{x}_0 - \bar{x})\|} \to 0 \quad \underbrace{\Leftrightarrow \underbrace{\bar{x}_\nu - \bar{x}_0}_{=\bar{y}_\nu} \to \underbrace{\bar{x} - \bar{x}_0}_{=\bar{y}_0}}_{\Leftrightarrow\ \|\bar{y}_\nu - \bar{y}_0\| \to 0} \Rightarrow \|\bar{y}_\nu\| \to \|\bar{y}_0\|$$

$$\Rightarrow \big|\, \|\bar{y}_\nu\| - \|\bar{y}_0\| \,\big| \to 0 \Leftrightarrow \|\bar{y}_\nu\| \to \|\bar{y}_0\|$$